4. RESTRICTII DE UNILATERALITATE. TRANSFORMATE HILBERT

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Fie o secvenţă reală cauzală, în sensul că:

$$x(n) = 0, \quad \text{pentru} \quad n < 0$$

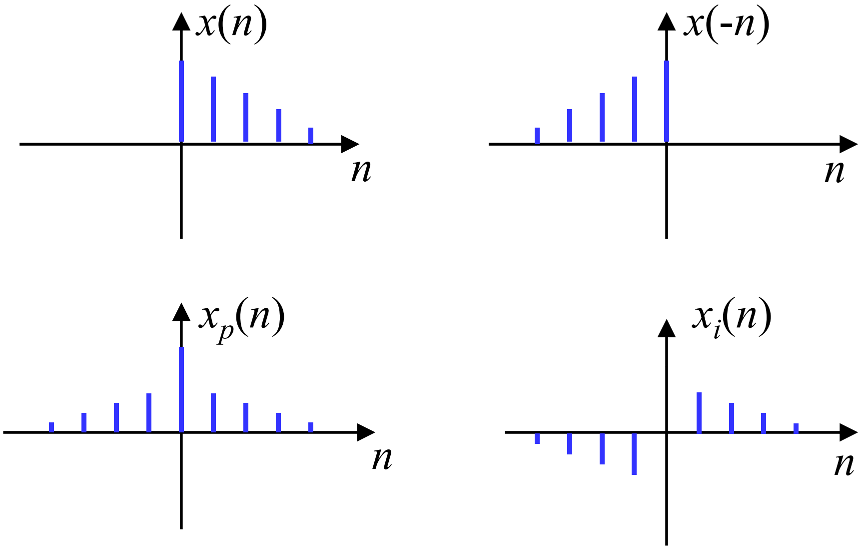
- Ce constrângeri derivă din această restricţie pentru transformata Fourier în timp discret $X\left(e^{j\omega}\right)$?

- *Partea pară* $x_p(n)$ şi *partea impară*, $x_i(n)$

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n)$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

$$x_p(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(-n)) \qquad x_i(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(-n))$$



4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Din condiţia de unilateralitate:

$$x(n) = \begin{cases} 2x_p(n), n > 0 \\ x_p(n), n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \qquad \text{sau:} \qquad x(n) = \begin{cases} 2x_i(n), n > 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

- Introducem funcţia: $s(n) = \begin{cases} 2, n > 0 \\ 1, n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$

aşa încât $\qquad x(n) = s(n)x_p(n)$

şi $\qquad x(n) = s(n)x_i(n) + x(0)\delta(n)$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

$$s(n)=\begin{cases}2, n>0\\1, n=0\\0, n<0\end{cases} \qquad S(z)=Z\{2u(n)-\delta(n)\}=\frac{2}{1-z^{-1}}-1=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

- Notând:

$$X(z)=Z\{x(n)\}; \quad X_i(z)=Z\{x_i(n)\}; \quad X_p(z)=Z\{x_p(n)\}$$

avem

$$X(z)=(S*X_p)(z)$$
$$X(z)=(S*X_i)(z)+x(0)$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

$$X(z)=(S*X_p)(z)$$
$$X(z)=(S*X_i)(z)+x(0)$$

Rezultă:

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_p(v)S\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_p(v)\frac{z+v}{z-v}\frac{dv}{v}$$

unde $C=\{v\in\mathbb{C} \mid |v|=1\}$

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_i(v)\frac{z+v}{z-v}\frac{dv}{v}+x(0)$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Presupunem $x(n)$ absolut sumabil $\Rightarrow$ există transformata Fourier (TFTD) şi cercul |z|=1 se află în domeniul de olomorfie al funcţiei $H(z)$.

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

- $x(n)$ este o secvenţă reală $\Rightarrow$

$$X_R(e^{j\omega}) = \mathrm{TFTD}\{x_p(n)\} = X_p(e^{j\omega})$$
$$jX_I(e^{j\omega}) = \mathrm{TFTD}\{x_i(n)\} = X_i(e^{j\omega})$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Integralele se efectuează pe cercul unitar,

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_R(v)\frac{z+v}{z-v}\frac{dv}{v}, \qquad |z|>1$$

$$X(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_C X_I(v)\frac{z+v}{z-v}\frac{dv}{v} + x(0), \quad |z|>1$$

- Pe C, v=e$^{j\omega}$ şi vom exprima z sub forma z=re$^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\frac{re^{j\omega}+e^{j\theta}}{re^{j\omega}-e^{j\theta}}d\theta, \qquad r>1$$

$$X_R(re^{j\omega}) + jX_I(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\frac{r^2-1+2jr\sin(\theta-\omega)}{r^2+1-2r\cos(\theta-\omega)}d\theta$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Rezultă:

$$X_I(re^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\frac{2r\sin(\theta-\omega)}{r^2+1-2r\cos(\theta-\omega)}d\theta, r>1$$

- Relaţia de mai sus permite calculul părţii imaginare a transformatei Z în exteriorul cercului unitar, în funcţie de partea reală, evaluată pe cercul unitar.
- Procedând la fel cu cea de-a doua ecuaţie, se obţine:

$$X_R(re^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta})\frac{2r\sin(\theta-\omega)}{r^2+1-2r\cos(\theta-\omega)}d\theta + x(0), \quad r>1$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

$$\lim_{r\to 1}\frac{2r\sin(\theta-\omega)}{r^2+1-2r\cos(\theta-\omega)} = \frac{\sin(\theta-\omega)}{1-\cos(\theta-\omega)} = \mathrm{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}$$

- care tinde către ∞ atunci când $\theta\to\omega$, aşa încât integralele vor trebui calculate în sensul de valori principale:

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\theta}\right)\mathrm{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}d\theta$$

$$X_R(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}V.P.\int_{-\pi}^{\pi} X_I\left(e^{j\theta}\right)\mathrm{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}d\theta + x(0)$$

4.1 Restricţii în domeniul frecvenţă pentru secvenţe reale cauzale

- Se defineşte transformata Hilbert pentru o funcţie periodică de perioadă 2π (transformata Hilbert în domeniul frecvenţă) prin:

$$\boxed{H_F\{f\}(\omega) = V.P.\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}\,d\theta}$$

- şi rezultă că pentru o secvenţă cauzală:

$$\boxed{\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_F\{X_R\}(\omega) \\ X_R(e^{j\omega}) &= -\frac{1}{2\pi} H_F\{X_I\}(\omega) + x(0) \end{aligned}}$$

4.2 Restricţii în domeniul timp pentru semnale unilaterale în domeniul frecvenţă

- Condiţia de unilateralitate în frecvenţă:

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{pentru} \quad -\pi \le \omega < 0$$

- Ne propunem să vedem ce efecte are această restricţie asupra secvenţei $x(n)$.
- $x(n)$ nu poate fi reală, pentru că altfel ar trebui ca

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n), \qquad \{x_R(n)\} \subset \mathbf{R}, \qquad \{x_I(n)\} \subset \mathbf{R}$$

- Se spune că $x(n)$ este *semnalul analitic asociat* oricăreia din secvenţele reale $x_R(n)$ sau $x_I(n)$

4.2 Restricţii în domeniul timp pentru semnale unilaterale în domeniul frecvenţă

$$\text{TFTD}\,\{x(n)\} = \text{TFTD}\{x_R(n)\} + j\,\text{TFTD}\{x_I(n)\} =$$
$$= X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega})$$

- Notăm:

$$X_r(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{x_R(n)\} = \text{TFTD}\left\{\frac{1}{2}\left(x(n) + x^*(n)\right)\right\}$$

$$X_i(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{x_I(n)\} = \text{TFTD}\left\{\frac{1}{2j}\left(x(n) - x^*(n)\right)\right\}$$

- Deci:

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right]$$

$$jX_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right]$$

4.2 Restricţii în domeniul timp pentru semnale unilaterale în domeniul frecvenţă

- Atât $X_r(e^{j\omega})$ cât şi $X_i(e^{j\omega})$ sunt transformate ale unor secvenţe reale, astfel încât

$$X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega})$$
$$X_i(e^{j\omega}) = X_i^*(e^{-j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 \le \omega < \pi \\ 0, & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 \le \omega < \pi \\ 0, & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}$$

4.2 Restricţii în domeniul timp pentru semnale unilaterale în domeniul frecvenţă

- Condiţia de unilateralitate $\Rightarrow$

$$X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{pentru.} \; -\pi \le \omega < 0$$

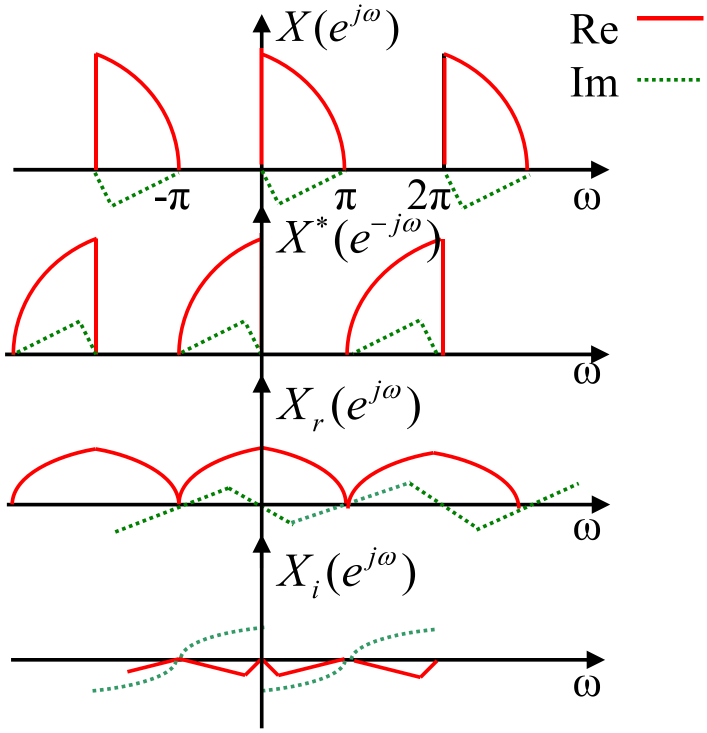
$$\boxed{X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_r(e^{j\omega}), & 0 \le \omega < \pi \\ jX_r(e^{j\omega}), & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}}$$

- Sau $\qquad X_i(e^{j\omega}) = H_H(e^{j\omega}) \cdot X_r(e^{j\omega})$

unde $\qquad \boxed{H_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \le \omega < \pi \\ j, & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}}$

este *transformatorul Hilbert ideal*.

4.2 Restricţii în domeniul timp pentru semnale unilaterale în domeniul frecvenţă



Transformatorul Hilbert ideal

$$\boxed{H_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \le \omega < \pi \\ j, & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}}$$

$$H_H(e^{j\omega}) = e^{j\frac{\pi}{2}} H_{H0}(e^{j\omega})$$

$$H_{H0}(e^{j\omega}) = -\operatorname{sign}\omega,\ \omega \in [-\pi, \pi]$$

- Funcţia de pondere a transformatorului Hilbert

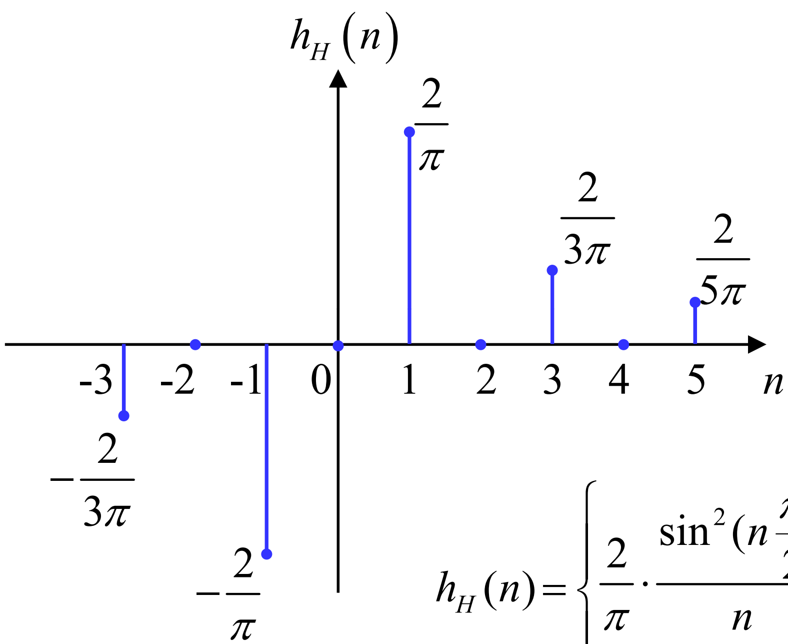
$$h_H(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_H(e^{j\omega})\, e^{jn\omega} d\omega = \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{jn\omega} d\omega - \frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{jn\omega} d\omega$$

$$= \frac{j}{2\pi}\cdot\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn} - \frac{j}{2\pi}\cdot\frac{e^{jn\pi}-1}{jn} = \frac{2-e^{jn\pi}-e^{-jn\pi}}{2n\pi}$$

$$h_H(n) = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{n} \quad \text{pentru} \quad n \neq 0$$

$$h_H(0) = 0$$

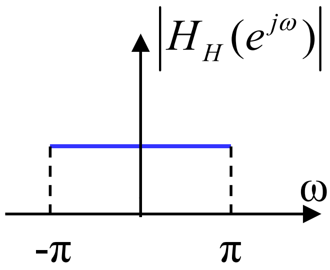
Transformatorul Hilbert ideal

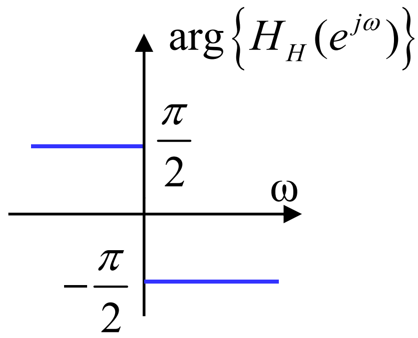


$$h_H(n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{n}, & n \neq 0 \\ 0\quad, & n = 0 \end{cases}$$

Transformatorul Hilbert ideal

- *Observaţii:*
  - Funcţia de pondere este, cum era de aşteptat, o funcţie impară.
  - Filtrul obţinut este necauzal.
  - Modulul şi argumentul funcţiei de transfer:





Transformatorul Hilbert ideal

- Se constată imediat că.

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{X_i(e^{j\omega})}{H_H(e^{j\omega})} = -H_H(e^{j\omega}) \cdot X_i(e^{j\omega})$$

- Rezultă în domeniul timp.

$$x_I(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_R(m) \cdot h_H(n-m) = \mathrm{H}_T\left\{x_R(n)\right\}$$

$$x_R(n) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_I(m) \cdot h_H(n-m) = -\mathrm{H}_T\left\{x_I(n)\right\}$$

unde s-a notat cu H operatorul *transformator Hilbert* în domeniul timp

$$\mathrm{H}_T\{.\} = \left(.*h_H(n)\right)$$

4.3 Generarea unui semnal BLU

- Este utilă introducerea unui semnal analitic în banda de bază.
- *Semnalul modulator* real $x_R(n)$ de frecvenţă maximă ω_M
- *Semnal analitic asociat*

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \ ; \qquad x_I(n) = \mathrm{H}\{x_R(n)\}$$

$$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{pentru.} \ -\pi \le \omega < 0$$

4.3 Generarea unui semnal BLU

- *Semnalul modulat*

$$s(n) = x(n)e^{j\omega_0 n} = s_R(n) + js_I(n)$$

unde ω_0 este *frecvenţa purtătoare*.

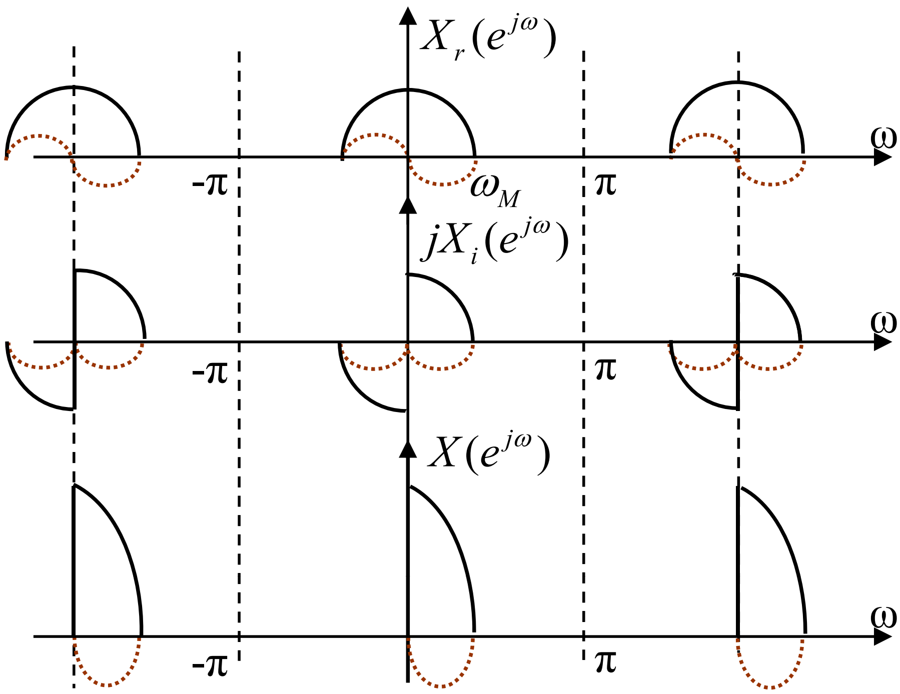
- În domeniul frecvenţă

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

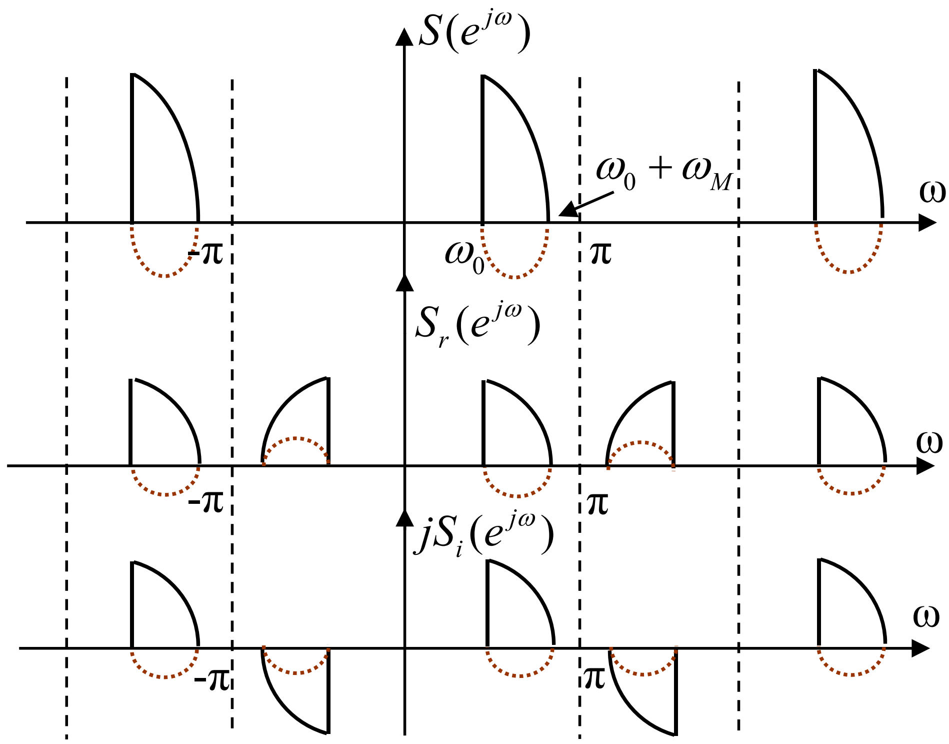
$$S_r(e^{j\omega}) = \mathrm{TFTD}\{s_R(n)\} = \frac{1}{2}\left(S(e^{j\omega}) + S^*(e^{-j\omega})\right)$$

$$jS_i(e^{j\omega}) = j\,\mathrm{TFTD}\{s_I(n)\} = \frac{1}{2}\left(S(e^{j\omega}) - S^*(e^{-j\omega})\right)$$

4.3 Generarea unui semnal BLU



4.3 Generarea unui semnal BLU



4.3 Generarea unui semnal BLU

- Dacă $\omega_0 + \omega_M < \pi$, $S(e^{j\omega})$ este tot un spectru de suport unilateral, deci

$$S_i(e^{j\omega}) = H_H(e^{j\omega}) \cdot S_r(e^{j\omega})$$

- $s_R(n)$ este tocmai semnalul BLU căutat.
- Semnalul complex poate se mai poate scrie

$$x(n) = A(n)\, e^{j\Phi(n)}$$

- sau partea reală şi cea imaginară (componentele în cuadratură)

$$x_R(n) = A(n)\cos\Phi(n) \qquad\qquad x_I(n) = A(n)\sin\Phi(n)$$

4.3 Generarea unui semnal BLU

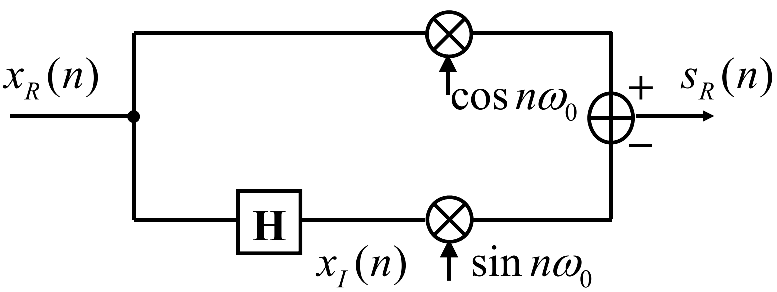
$$A(n) = \left(x_R^2(n) + x_I^2(n)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad \Phi(n) = \mathrm{arctg}\,\frac{x_I(n)}{x_R(n)}$$

- Semnalul modulat complex va fi

$$s(n) = A(n)\, e^{j(\omega_0 n + \Phi(n))}$$

- iar partea sa reală este semnalul căutat

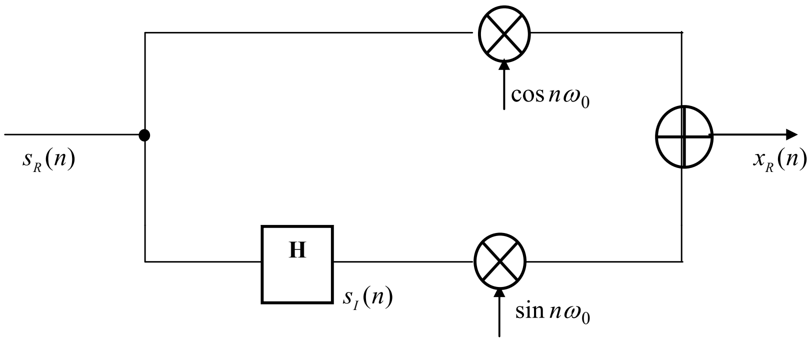
$$s_R(n) = A(n)\cos\left(\omega_0 n + \Phi(n)\right) = x_R(n)\cos n\omega_0 - x_I(n)\sin n\omega_0$$



Demodulatorul BLU

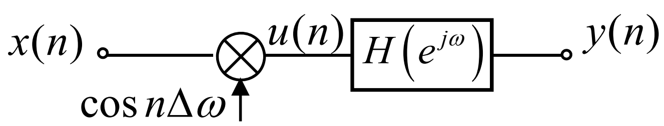
$$s_I(n) = A(n)\sin\left(\omega_0 n + \Phi(n)\right) = x_R(n)\sin n\omega_0 + x_I(n)\cos n\omega_0$$

$$s_R(n)\cos n\omega_0 + s_I(n)\sin n\omega_0 = x_R(n)\left(\sin^2 n\omega_0 + \cos^2 n\omega_0\right) = x_R(n)$$

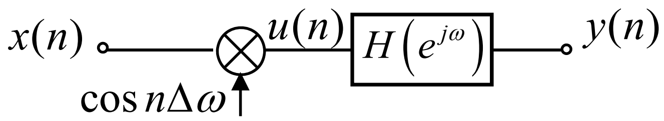


4.4 Schimbătorul de frecvenţă

- Fie $x(n)$ un semnal real, de bandă limitată, centrat pe frecvenţa ω_0, cu spectrul $X\left(e^{j\omega}\right)$
- Dorim să translatăm acest semnal de pe frecvenţa centrală ω_0 pe $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$, în care $\Delta\omega$ poate fi
  - pozitiv (conversie superioară de frecvenţă) sau
  - negativ (conversie inferioară).
- Vom nota cu $Y\left(e^{j\omega}\right)$ spectrul dorit. Soluţia obişnuită constă în multiplicarea cu $\cos(n\Delta\omega)$, urmată de o filtrare cu un filtru trece-sus, dacă $\Delta\omega > 0$, sau trece-jos, dacă $\Delta\omega < 0$.



4.4 Schimbătorul de frecvență

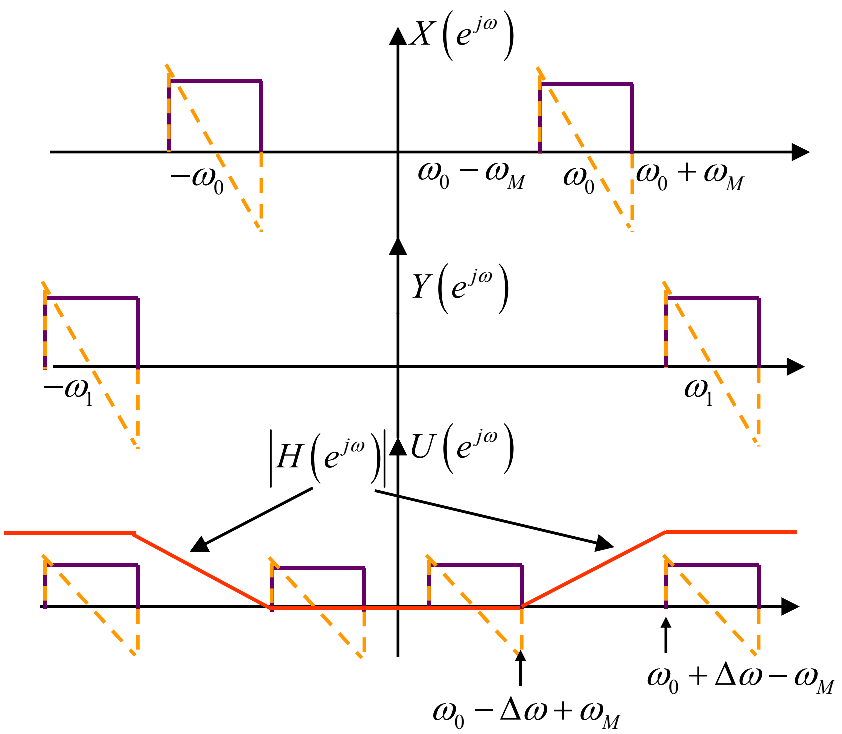


$$u(n)=x(n)\cos(n\Delta\omega)=\frac{1}{2}x(n)e^{jn\Delta\omega}+\frac{1}{2}x(n)e^{-jn\Delta\omega}$$

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\Delta\omega)}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\Delta\omega)}\right)$$

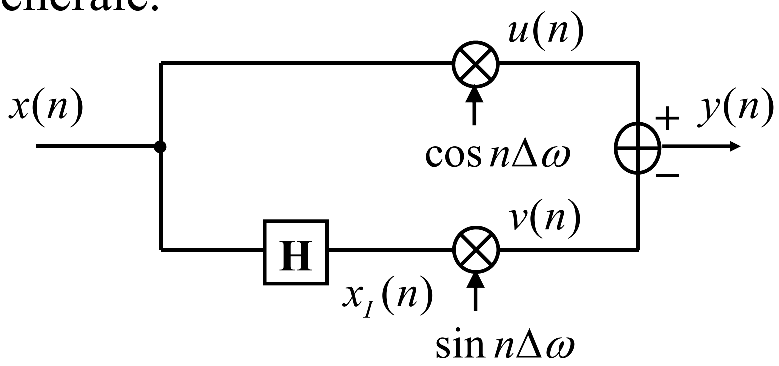
- Vom considera cazul $\Delta\omega>0$. Prin filtrare trebuie eliminat spectrul centrat pe $\omega_0-\Delta\omega$. Pentru ca acest lucru să fie posibil, este necesar ca $\Delta\omega>\omega_M$
- Metoda se poate aplica numai pentru $\Delta\omega-\omega_M$ suficient de mare.

4.4 Schimbătorul de frecvență



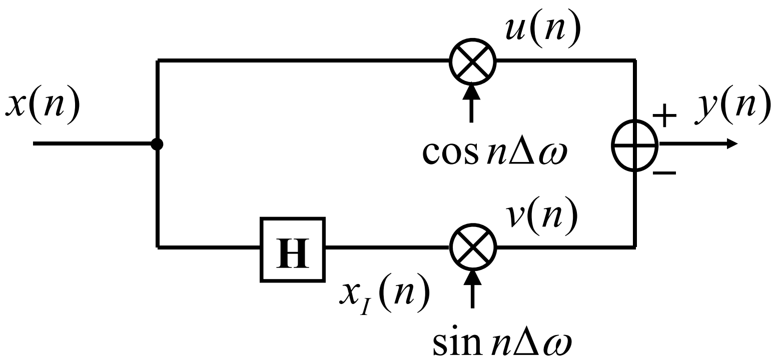
4.4 Schimbătorul de frecvenţă

- O metodă ce poate fi aplicată în condiţii mai generale.



- Este de fapt echivalentă cu o modulaţie cu bandă laterală unică a purtătoarei cos($n\Delta\omega$) cu semnalul $x(n)$
- Semnalul $u(n)$ are expresia şi spectrul deduse mai sus.

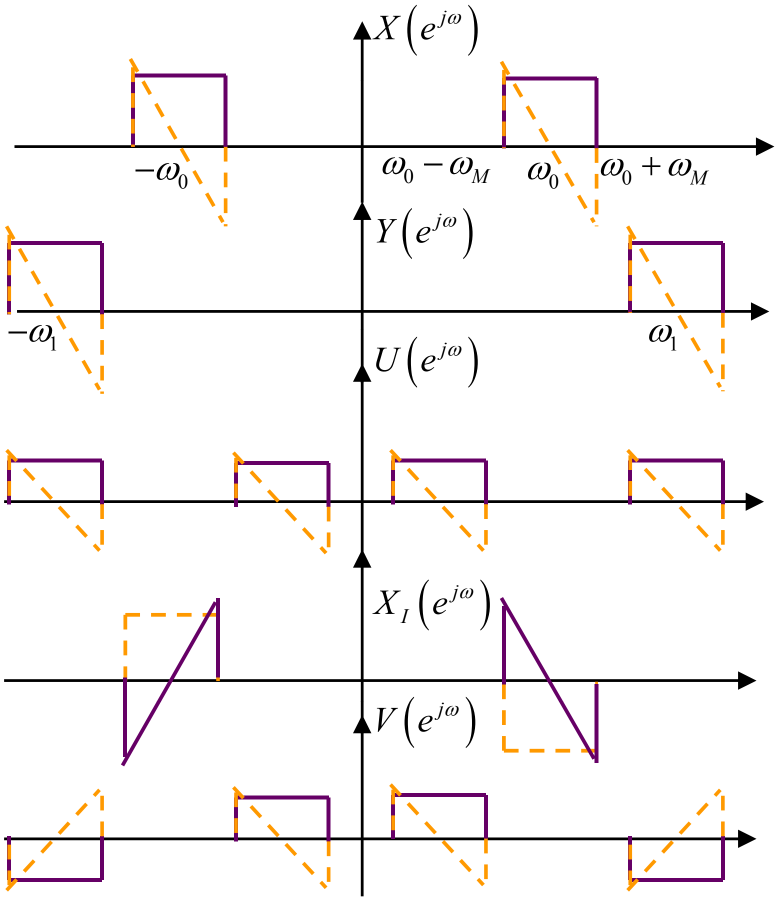
4.4 Schimbătorul de frecvenţă



$$v(n) = x_I(n)\sin(n\Delta\omega) = \frac{1}{2j}x_I(n)e^{jn\Delta\omega} - \frac{1}{2j}x_I(n)e^{-jn\Delta\omega}$$

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2j}X_I\left(e^{j(\omega-\Delta\omega)}\right) - \frac{1}{2j}X_I\left(e^{j(\omega+\Delta\omega)}\right)$$

- Prin scăderea spectrelor semnalelor $u(n)$ şi $x(n)$ se obţine spectrul semnalului dorit, $y(n)$



$X\left(e^{j\omega}\right)$
$-\omega_0$
$\omega_0-\omega_M$
ω_0
$\omega_0+\omega_M$
$Y\left(e^{j\omega}\right)$
$-\omega_1$
ω_1
$U\left(e^{j\omega}\right)$
$X_I\left(e^{j\omega}\right)$
$V\left(e^{j\omega}\right)$